

Cammini di Feynman (base)

un cammino di Feynman per calcolare la fase finale

Per utilizzare il metodo dei diversi cammini proposto da R Feynman occorre impostare prima un singolo cammino che parta dalla sorgente e raggiunga il rivelatore in modo da poter calcolare la fase di arrivo da utilizzare per costruire un poligono vettoriale da utilizzare per il calcolo delle probabilità.

Utilizzare il progetto base

Il progetto di **base** viene attivato semplicemente con **[bandierina verde]**.

Dopo aver scelto la posizione del rivelatore si preme **[tasto U]** per vedere il fotone avanzare gradualmente verso il rivelatore e nel contempo vedere la progressione della fase rappresentata da un oggetto ad esso accoppiato e che viene chiamato "fasore".

Per osservare meglio la fase è stato aggiunto sulla destra un oggetto che funge da monitor e che riproduce ingrandito il fasore associato al fotone indicandone la fase.

Al termine del percorso vengono forniti sullo stage i dati che interessano tra i quali la fase finale.

La fase finale dipende dal cammino.

Finché non si preme la bandierina verde, il "monitor" lascia una traccia della posizione finale dell'angolo assunto dal vettore associato al fotone così da poter vedere che, cambiando il cammino, la fase finale cambia, di poco o di tanto a seconda dei cammini considerati.

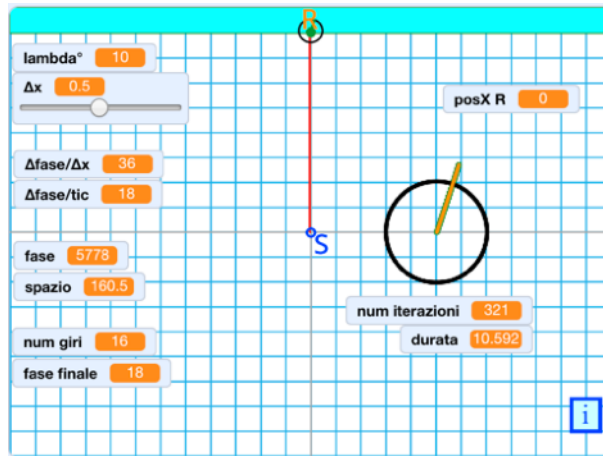
Per rilevare questo effetto occorre spostare il rivelatore usando i tasti freccia o il puntatore del mouse.

Ci si aspetta che spostamenti piccoli producano differenze di fase piccole ma ciò è vero solo per i percorsi più brevi.

Esempio di utilizzo

Si prova con $\lambda = 10$, $\Delta x = 0,5$ e con il rivelatore nella posizione $x = 0$ che sono i parametri di default.

Si ottiene la seguente schermata dello stage:



Dati rilevati

- fase = 5778;
- fase finale = 18°;
- numero di giri = 16;
- spazio percorso = 160,5;
- durata = 10,592;
- num iterazioni = 321.

Discussione

Il cammino percorso è 160,5 passi.

Strano!

Ci si aspettava un valore di 160 passi in quanto la sorgente si trova all'ordinata 0 e il rivelatore si trova a $y=160$.

C'è un problema di software.

La reiterazione dell'avanzamento termina quando l'ordinata del fotone ha ordinata $y > 160$ cioè appena superato $y = 160$ quindi per un valore pari a $160 + \Delta x^1$.

Nota. Per via software si potrebbe correggere facilmente l'inconveniente ma ci si andrebbe ad occupare di una precisione ininfluyente ai fini degli esperimenti illustrati in questo libro per cui si evita di complicare inutilmente il codice². D'altronde nulla cambia se si pensa che tutti i cammini di un esperimento terminano a $y = 160 + \Delta x$ anziché a 160. Per tale ragione i valori sono ritenuti comunque validi ai fini di ogni discussione sui cammini.

Esame dei risultati

Con $\lambda = 10$, ogni 10 passi di avanzamento il vettore compie un giro; con 160,5 passi il vettore compie

$$\frac{160,5}{10} = 16,05 \text{ giri}$$

che corrispondono a

$$16,05 * 360 = 5778 \text{ gradi}$$

cioè

$$16 * 360 + 18 = 5760 + 18 = 5778 \text{ gradi}$$

quindi sono 16 giri con resto di 18° che è la fase finale del cammino.

Osservazioni

Spostando il rivelatore si farà l'esperienza di costruire innumerevoli cammini del fotone ciascuno dei quali restituisce un valore per la "**fase finale**" che sarà utile in seguito per gli esperimenti sul metodo dei cammini.

Con il rivelatore in prossimità dell'ascissa 0 la variazione di posizione del rivelatore pari ad un passo produce una **fase finale** poco diversa dalla precedente mentre con il rivelatore posto a $x=200$, l'incremento di fase è molto maggiore.

Nota. Purtroppo, con i parametri scelti, le differenze di fase sono multipli di 18 il che non aiuta molto a rilevare queste differenze. Si può ovviare diminuendo il valore di avanzamento Δx ad ogni iterazione ma la durata del percorso diventa più grande.

¹ Inserire la condizione di arresto a "posizione $y = 160$ " può rivelarsi catastrofico in senso computazionale in quanto i calcoli numerici al computer possono non dare valori esattamente uguali a 160 ma solo molto prossimi ad esso con la conseguenza che il ciclo non si fermerebbe mai.

² A qualcuno potrebbe anche piacere così in quanto il fotone interagendo con la materia penetra un po' al di sotto della superficie (?) rilevabile dello schermo.

L'effetto è ancora maggiore se si sposta la sorgente in alto a ridosso dello schermo. Dato che la differenza di cammini dipende molto dall'angolo che il cammino ha rispetto alla verticale (che è poi il cammino più breve) questa posizione ravvicinata della sorgente allo schermo esalta la differenza fra le fasi finale per piccoli spostamenti del rivelatore.

Nota. Questa osservazione è alla base del metodo dei cammini: cammini molto distanti da quelli brevi portano contributi alla fase finale molto diversi al punto di rendere insignificante il contributo del vettore alla costruzione del vettore risultante.

Modalità “turbo”

Se si è impazienti e non si è più interessati ad osservare il fotone che avanza con il suo fasore associato, si premono **[bandierina verde] + [tasto maiuscole]** per attivare la **modalità “turbo”**.

In questa modalità, l'animazione grafica viene sacrificata a vantaggio della rapidità di calcolo³.

Con lo stesso comando si torna alla modalità normale.

Cammini diversi

Con **[tasto R]** si fa ripetere lo stesso cammino.

Per osservare altri cammini si reinizializza l'applicazione oppure si spostano la sorgente e/o il rivelatore.

Se si opta per uno spostamento di uno di essi o di entrambi si ha il vantaggio di poter osservare le variazioni relative dell'angolo di fase finale in quanto vengono stampate con il monitor senza cancellare quelle precedenti.

Per cancellare tutto si preme **[tasto E]**.

Spostare la sorgente

La sorgente si può spostare per trascinamento utilizzando il mouse.

Per attivare il nuovo cammino si preme **[tasto U]**.

Spostare il rivelatore

Il rivelatore si può spostare per trascinamento utilizzando il mouse e poi facendo click su di esso per posizionarlo: il nuovo cammino si riattiva con **[tasto U]**.

³ Scratch è impostato per creare animazioni grafiche così che la grafica dello stage viene ridisegnata per illustrare la modifica della posizione degli oggetti. Il refresh della grafica avviene alla frequenza di 30 fps.

In alternativa si usano i tasti [freccia sx] o [freccia dx] per spostamenti di un passo o i tasti [freccia su] o [freccia giù] per spostamenti di 10 passi.

Il nuovo cammino viene attivato con [tasto U].

Osservazioni ed esperimenti

Fare esperimenti per diverse posizioni della sorgente e del rivelatore e per diversi incrementi di spostamento.

Il valore della “fase finale” dipende sempre dalla lunghezza del cammino.

La **risoluzione** del valore della “fase finale” dipende dal passo Δx che si sceglie.

Piccole differenze di cammino comportano piccole differenze nel valore della “fase finale”.

Piccole modifiche nella posizione del rivelatore portano a piccole differenze del valore della “fase finale” solo nella zona in cui il cammino è il più breve (quando sorgente e rivelatore hanno pressappoco la stessa ascissa).

Esperimenti sui cammini

Posto che lo stage pone dei limiti agli esperimenti date le dimensioni limitate a 480 intervalli lungo l’asse x e 360 intervalli lungo l’asse y , si possono fare diversi esperimenti che riguardano i cammini.

Il cammino più breve è quello esaminato nell’[esempio precedente](#).

Può essere utile esaminare il cammino più lungo ed anche una coppia di cammini contigui per conoscere quali possano essere valori in gioco e quali le differenze.

Partendo dal progetto base si possono ricavare alcuni valori:

esperimento con $\Delta x = 0.5$ (default)

caso 1: posizione centrale di R

con posizione di R a 0 si ottiene

spazio percorso = 160,5 passi

fase finale = 18°

con posizione di R a 1 si ottiene

spazio percorso = 160,5 passi

fase finale = 18°

Conclusione: la differenza di cammino e della fase finale per uno spostamento del rivelatore di un passo verso destra o verso sinistra non è rilevabile.

caso 2: posizione laterale di R

con posizione di R a 239 si va all'estremo destro dello stage e si ottiene

spazio percorso = 288 passi

fase finale = 288°

con posizione di R a 240 si ottiene

spazio percorso = 288,5 passi

fase finale = 306°

Conclusione: la differenza di cammino è minima mentre la differenza di fase finale è di 18 gradi.

Con un passo $\Delta x = 0,5$ ed un $\lambda = 10$, la differenza di fase minima rilevabile è di 18 gradi che costituisce la risoluzione dello strumento.

Con valori più piccoli di Δx si hanno risoluzioni migliori.

esperimento con $\Delta x = 0.01$

caso 1: posizione centrale di R

con posizione R = 0 si ottiene

fase finale = $0,36^\circ$

con posizione di R a 1 si ottiene

fase finale = $0,36^\circ$

Conclusione: la differenza di cammino e della fase finale per uno spostamento del rivelatore di un passo non è di nuovo rilevabile.

caso 2: posizione laterale di R

con posizione di R a 239

fase finale = $274,32^\circ$

con posizione di R a 240

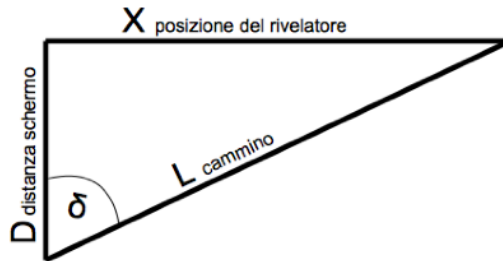
fase finale = $304,2^\circ$

cammino L = 288,45 passi

Conclusione, la differenza di fase fra i due cammini contigui è $29,88^\circ$.

Verifica dei risultati

La situazione geometrica è rappresentata dal grafico



Data la distanza D dello schermo dalla sorgente e la posizione X rispetto alla sorgente si può conoscere la lunghezza del cammino L :

$$L = \sqrt{D^2 + X^2}$$

Quando X è molto piccolo rispetto a D ci si trova nel punto dello schermo più vicino alla sorgente, l'angolo δ è piccolo, il valore di X^2 è piccolo rispetto al valore di D^2 per cui la lunghezza del cammino L vale circa D .

Per angoli molto grandi si possono avere differenze più grandi⁴ così che anche le differenze dei cammini e delle fasi finali diventano importanti.

Per angoli grandi si ha che D^2 tende a diventare molto piccolo rispetto a X^2 per cui ad una variazione di X di una unità corrisponde una variazione di L di quasi una unità.

La differenza dei cammini comporta una corrispondente notevole differenza delle fasi finali.

Per piccoli angoli δ la differenza fra fasi finali di cammini contigui è piccolissima mentre cresce considerevolmente con l'aumentare di δ .

Con $D = 160$ si può calcolare che

con $PosXR = 239$ vale:

$$L = \sqrt{D^2 + X^2} = \sqrt{160^2 + 239^2} = 287,6 \text{ passi}$$

dato che il valore di λ vale 10, si può calcolare la rotazione totale con:

⁴ La variazione del coseno è proporzionale al seno dell'angolo per cui per angoli prossimi a zero la variazione è prossima a zero, per angoli prossimi a 90° la variazione tende a 1.

$$angolo = \frac{L}{\lambda} = \frac{287,6}{10} = 28,76 \text{ giri}$$

La fase finale è data dalla frazione di giro di 76 centesimi che corrisponde a

$$fase.finale = 0,76 * 360 = 273,6^\circ$$

valore che corrisponde bene al valore 274,32 rilevato usando Scratch⁵ con $\Delta x = 0,01$.

Valutazioni preparatorie

Negli esperimenti più impegnativi si arriverà ad esplorare lo spazio delle possibili traiettorie con decine di cammini per ciascuna ascissa x del rivelatore compresa da -240 a +240.

La modalità “turbo” torna vantaggiosa se si vuole sperimentare cosa accade spostando di poco la posizione del rivelatore in quanto non si deve attendere troppo tempo per vedere il risultato.

La durata di un cammino che si rileva in modalità “turbo” ha un valore piuttosto basso, spesso non misurabile.

Il progetto base consente di valutare meglio la durata dei calcoli di un cammino facendo compiere 10 volte lo stesso cammino con **[tasto D]** o cento volte con **[tasto C]**.

Provando con 100 ripetizioni del cammino in **modalità turbo** si ricava una durata che dipende dall’hardware utilizzato oltre che dalle caratteristiche del cammino.

Per 100 ripetizioni di un cammino medio con sorgente in 0,0 e rivelatore in 120,160 è stata misurata una durata di circa 4 secondi. Per cammini più inclinati la durata aumenta.

Per dei calcoli approssimati si può assumere una durata media per cammino di 0,05 s.

Con un esperimento che preveda 20 cammini della durata media di 0,04 s ciascuno per ogni posizione del rivelatore e 481 posizioni del rivelatore ci vogliono 9.620 cammini in tutto che, con $\Delta x = 0,5$, significa una durata dell’esperimento di almeno 345 s, circa 6,4 minuti.

Spesso si ha a che fare con percorsi lunghi il doppio o il triplo con conseguenti aggravii di tempo di calcolo.

⁵ Lunghezza e fase finale rilevati con Scratch sono leggermente superiori in quanto il calcolo viene arrestato per un valore di D leggermente superiore a 160.

Se si vuole migliorare la definizione occorrerà diminuire Δx e corrispondentemente la durata dell'esperimento aumenterà.

Si vedrà che per aumentare il dettaglio del risultato si dovranno impiegare molti più cammini e valori Δx bassi con conseguente aumento dei tempi di calcolo.

Nota. Valori diversi di Δx fanno terminare il tragitto del fotone in posizioni diverse in quanto il suo moto viene arrestato appena la sua ordinata supera il valore 160 e questo dipende da Δx e dall'inclinazione. La valenza didattica non ne direbbe essere danneggiata.

Impostazioni del progetto

Lo sprite "fotone"

Lo sprite "fotone" rappresenta l'oggetto quantistico il cui comportamento è indagato in questo gruppo di progetti realizzati con Scratch.

Il codice ha il solo scopo di tracciare un singolo cammino rettilineo che parte dalla Sorgente e giunge al Rivelatore.

Il fotone è caratterizzato da una grandezza, di come *lambda*, che rappresenta il percorso necessario affinché il fasore associato compia un intero giro.

Per realizzare il calcolo della fase finale occorre fare partire il fotone dalla sorgente accompagnato da questo vettore e farlo muovere verso un punto dove si trova il rivelatore.

La direzione del moto del fotone dipende dal tipo di esperimento e, per semplicità, le traiettorie esplorate sono sempre segmenti di retta⁶.

La rotazione per unità di spostamento dipende dalla grandezza lambda che è una caratteristica del fotone.

*Ricordo che con Scratch gli spostamenti vengono misurati in **passi**, gli angoli in **gradi** con verso positivo orario a partire dal verso dell'asse y.*

Il fotone parte quando si preme **[tasto U]**.

Quando il fotone raggiunge lo schermo posto in alto si ha il suo arresto.

In progetti più complessi si tratta di realizzare più tratti rettilinei per considerare percorsi più articolati in relazione alla geometria dell'esperimento.

Gli sprite "sorgente" e "rivelatore"

Il codice serve a fare in modo che entrambi gli sprite possano essere collocati in più posizioni per poter ottenere la fase finale in diversi contesti.

Il questo progetto si possono spostare a piacimento ma il rivelatore deve sempre essere posto sulla faccia inferiore dello schermo facendo click sullo sprite.

Con i tasti freccia si può spostare il rivelatore di un singolo passo o a blocchi di 10 passi sia a destra che a sinistra.

⁶ A posteriori si può vedere se questa semplificazione non sia deleteria al fine di osservare i fenomeni di propagazione ed interferenza del fotone. Feynman afferma che è importante considerare un certo numero di traiettorie vicine per ottenere i risultati attesi.

Lo sprite "fasore"

Per realizzare i progetti, si tratta di creare con Scratch l'oggetto di Feynman consistente in uno sprite che accompagna il fotone ruotando di un angolo man mano che avanza mantenendo invariato il modulo.

L'oggetto è dato dallo sprite "fasore".

Quando il fotone colpisce il rivelatore, il cammino ha termine e si rileva il valore dell'angolo assunto dal vettore associato al fotone.

Perché questo valore abbia un senso, tutti i fasori associati a fotoni emessi dalla stessa sorgente devono avere la stessa fase di partenza (zero nel caso degli esempi trattati qui).

Lo sprite "monitor"

Lo sprite monitor riproduce la posizione angolare del fasore mantenendo fissa la posizione sullo stage.

Permette anche di apprezzare visivamente il valore della fase finale in relazione a percorsi precedenti.

Il tempo

L'intero cammino dell'**esempio di utilizzo** è stato realizzato graficamente ripetendo la stessa istruzione di avanzamento per un certo numero di volte.

La durata del trasferimento del fotone da S a R è di 321 iterazioni.

La durata reale in secondi ha un senso per lo sperimentatore solo per sapere quanto tempo viene impiegato per simulare un esperimento usando questa tecnica quando si devono provare innumerevoli cammini (molte centinaia).

I tempi di Scratch

La durata del cammino è stata misurata da un cronometro interno a Scratch; il dato fornito ci permette di calcolare la durata di ciascuna iterazione:

$$durata.iterazione = \frac{durata}{num.iterazioni} = \frac{10,592}{321} = 0,032997 \simeq 0,33 \text{ s}$$

il cui reciproco fornisce il valore 30 Hz che è il numero di iterazioni eseguite in un secondo; tale valore è la frequenza di refresh dello stage di Scratch⁷.

L'intervallo di tempo minimo è dato dall'esecuzione di una sola iterazione.

⁷ Il refresh dello stage è 30 fps. In **questo** articolo ed in **questo** sono stati indagati alcuni aspetti della velocità di calcolo di Scratch.

Il tempo fra due momenti diversi della traiettoria è dato dal conteggio delle iterazioni compiute tra i due momenti.

Ai fini della simulazione numerica, il tempo è dato dal conteggio delle iterazioni che io misuro, arbitrariamente, in *tic*.

Il *tic* è quindi l'unità di tempo minima utilizzabile nei calcoli effettuati con queste simulazioni.

Risoluzione

Si nota che il valore di “*fase finale*” è affetto da una bassa risoluzione: 18°.

Ad ogni incremento Δx del percorso la frazione di rotazione è

$$\Delta fase = \frac{\Delta x}{\lambda} * 360$$

Nell'esempio di default, il valore di lambda è posto a 10.

Questo significa che ci vuole uno spostamento di 10 passi sullo stage di Scratch per far compiere una rotazione di 360 gradi al vettore associato.

Se si fa avanzare il fotone con $\Delta x = 0,5$ (valore di default nel progetto) ad ogni iterazione corrisponde un incremento di fase pari a 18°.

Se si fa avanzare il fotone con $\Delta x = 0,2$ ad ogni iterazione corrisponde un incremento di fase pari a 7,2°.

Con il cursore si può modificare il valore di Δx da 0,01, con cui l'avanzamento sarà lentissimo ma con una risoluzione migliore nel valore della “*fase finale*”, a $\Delta x=1$ per avere avanzamento rapidi ma con scarti grossolani nel valore della “*fase finale*”.

Se ne dovrà tenere conto quando ci si dovrà impegnare a fare percorrere molti cammini per scegliere quale opzione sia la migliore dovendo scegliere fra durata dei calcoli e precisione delle risposte.

Scheda allegata alla [pagina](#)

<https://mastropaolo.net/didattica-con-scratch/fisica/cammini-di-feynman/un-cammino-di-feynman>