

una cannonata estrema

cinematica, geometria, balistica

L'esperimento serve a effettuare misurazioni sulla caduta dei gravi in campo gravitazionale uniforme con una escursione temeraria per grandi gittate.

Parametri fisici

Nel progetto sono adottati i seguenti parametri:

- accelerazione di gravità al suolo è posta a 9,81 m/s/s ed è sempre rivolta parallelamente verso il basso dello schema;
- la velocità è in m/s in entrambe le direzioni;
- la gittata è il punto in cui il proiettile tocca il suolo o il bordo destro dello stage ed è misurata in metri;
- l'altezza della torre e la posizione verticale del proiettile sono misurate in metri.

La torre è alta $h = 400$ m e la velocità V_{x0} scelta dal player è la velocità iniziale del proiettile ed è orizzontale.

Il proiettile, dopo il colpo di cannone, non riceve alcuna spinta ulteriore ma non viene nemmeno frenato in quanto si imposta l'esperimento in assenza di aria, non vero sulla Terra ma verosimile per altri pianeti o satelliti.

In queste circostanze la traiettoria è un arco di parabola ad asse verticale con concavità verso il basso e con vertice sulla bocca del cannone.

La traiettoria del proiettile è una parabola data dalle equazioni parametriche:

$$x(t) = posX0 + vx(t)$$

$$y(t) = posY0 + vY0 * t - \frac{1}{2} g * t^2$$

che rappresentano un moto uniforme orizzontale che si compone con un moto uniformemente accelerato verticale.

Nota. Le approssimazioni sono sopportabili in quanto si tratta di un esperimento numerico il cui fine va al di là del proposito di sparare una cannonata contro qualche bersaglio.

Per osservare la traiettoria è stata fatta la scelta di rendere modificabile la scala delle distanze orizzontali ma di non modificare la scala delle posizioni verticali in modo che velocità più alte possano permettere di fare vedere gittate più lunghe.

Il profilo terrestre

Per dare senso all'esperimento è necessario tenere conto del fatto che la curvatura della Terra non è più trascurabile per distanze molto lunghe.

Il disegno riproduce in scala la situazione reale utilizzando lo stage come sistema di riferimento per cui:

- la torre alta 400 m viene disegnata con la sommità a 40 passi¹ dalla basenposta a $y=0$;
- la base della torre di lancio si trova in $(-200, 0)$ ed è usata come riferimento di tutte le operazioni geometriche;
- la superficie terrestre è stata disegnata passante orizzontalmente per il punto $(-200, 0)$ dello stage dove si trova la base della torre;
- la sommità della torre alta 400 m si trova nel punto $(-200, 40)$ avendo deciso di usare per l'asse verticale una scala di 10 m per ogni passo disegnato;
- il raggio terrestre è impostato a 6.370.000 m per cui il centro della Terra si trova sotto la torre di lancio alle coordinate $(-200, -6.370.000/10)$
- la Terra ha la forma di una sfera perfetta e liscia, non è un geoide e non ha nemmeno rilievi montagnosi.

Per riuscire a fare vedere la traiettoria, la scala delle y non viene modificata mentre la scala delle x è modificabile e di conseguenza devono essere modificate con la stessa scala le ascisse dei punti del disegno della superficie della Terra.

Per questo motivo al variare della scala occorre ridisegnare la linea che rappresenta il profilo terrestre.

Disegno del profilo terrestre

Per il disegno del profilo terrestre si usa la definizione della circonferenza utilizzata in geometria analitica con centro nell'origine è:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

L'ordinata y si calcola con

¹ Il passo è l'unità di misura delle distanze dello stage di Scratch e corrisponde alla distanza di due pixel vicini sullo schermo in modalità editor.

cannonata estrema

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Il disegno viene realizzato calcolando y al variare di x.

Il disegno del profilo terrestre sullo stage deve tenere conto delle scale di riduzione:

- scalaX = 10 (10 metri in un passo)
- scalaY = variabile (1, 10, 100, 200m in un passo)

Di conseguenza dato il valore di x la posizione l'ascissa posX dello sprite è data da

$$posX = \frac{x}{scalaX}$$
$$posY = \frac{y}{scalaY}$$

Inoltre è necessario effettuare una traslazione per posizionare lo sprite in modo che la circonferenza passi per (-200, 0) con tangente orizzontale.

Il centro della circonferenza da disegnare dovrà essere spostata verso sinistra di 200 passi ed abbassata di una quantità pari al raggio terrestre diviso la scalaY.

Il disegno del profilo va effettuato utilizzando le coordinate (posX, posY) dello sprite.

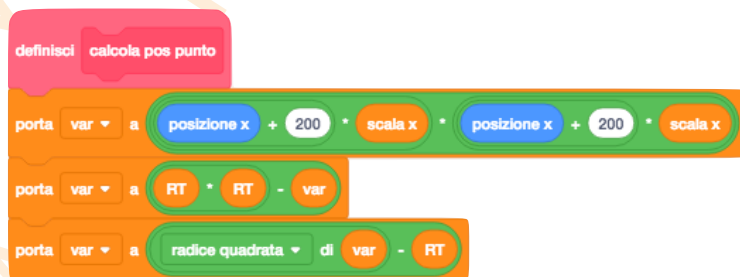
Data la posizione posX dello sprite si ricava l'ascissa x con:

$$x = (posX + 200) * scalaX$$

il valore dell'ordinata da disegnare si ricava considerando che il centro va posto in YC = - RT:

$$posY = \frac{1}{scalaY} * (\sqrt{RT^2 - ((posX + 200) * scalaX)^2} - RT)$$

Il codice che disegna il profilo terrestre è:



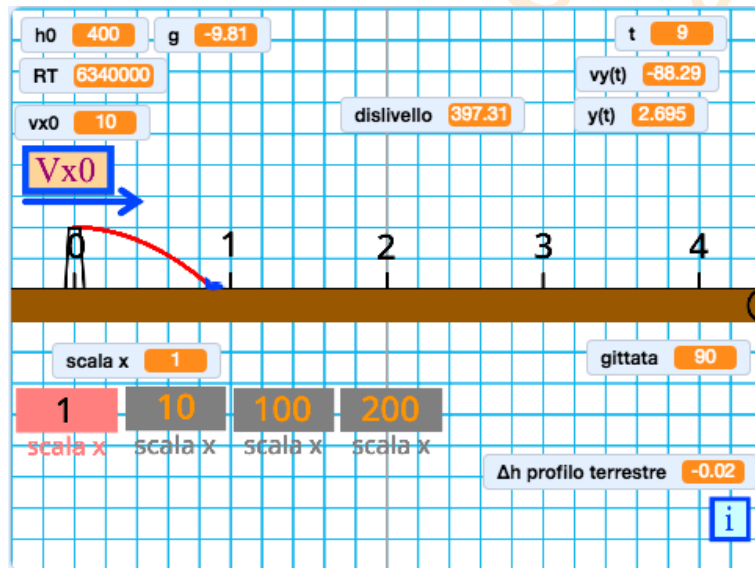
Il profilo terrestre così disegnato è un arco di ellisse a causa delle diverse scale usate per le due direzioni.

Quando il profilo terrestre è stato completamente disegnato e lo sprite “profilo” ha raggiunto la posizione 440 compare il valore dell’abbassamento della superficie rispetto al piano orizzontale.

Esperimenti

Caso con $V_{x0} = 10 \text{ m/s}$ (default).

Con scala 1 si ha il seguente disegno:



Rilievi e misurazioni:

1. il profilo terrestre appare piatto;
2. il proiettile si ferma a $y(t) = 2,695$ che sono 2,6 m al di sopra del suolo;
3. la durata della caduta è di 9 s;
4. la velocità verticale è $-88,29 \text{ m/s}$ (negativa perché una caduta);
5. la gittata è di 90 m.

Valutazioni

1. alla scala del disegno l'estremità destra dello stage si trova a 440 m ed il profilo terrestre a 440 m di distanza si è abbassato di 0,02 m: giustamente sembra piatto;

2. il metodo numerico adottato ed il funzionamento di Scratch non permettono l'arresto nel punto esatto in cui tocca il suolo; questo errore non è riducibile e si propaga alle altre misurazioni che seguono;
3. la durata attesa della caduta si ricava dalle leggi del moto uniformemente accelerato:

1. la componente orizzontale della velocità è ininfluente sulla durata della caduta,

2. la caduta verticale è di 400 m per cui

3. $t = \sqrt{\frac{2 * h}{g}} = \sqrt{2 * 400 / 9,81} = 9,03 \text{ s};$

4. la velocità finale verticale di caduta è

1. $v_y = -g * t = -9,81 * 9,03 = 88,6 \text{ m/s}$

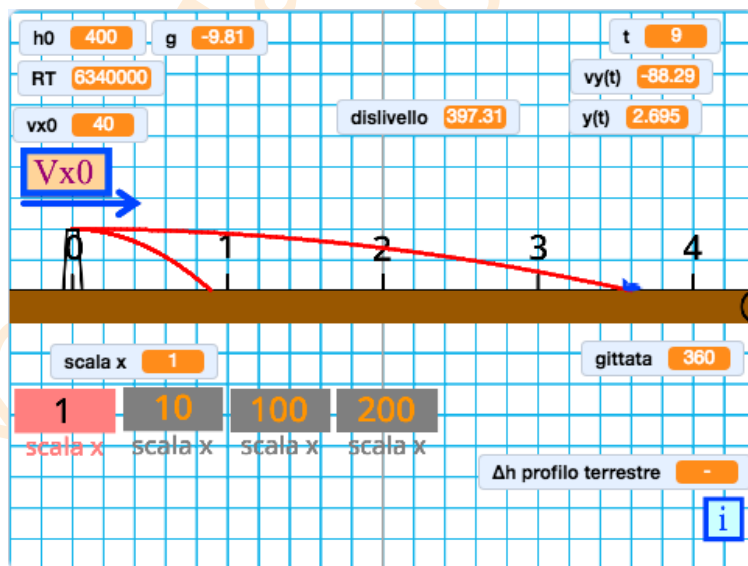
5. lo spazio percorso è:

1. $s_x = v_x * t = 10 * 9,03 = 90,3 \text{ m}.$

Come si vede gli errori rilevati nelle misurazioni sono modesti.

Caso con $V_{x0} = 40 \text{ m/s}.$

Analogamente:



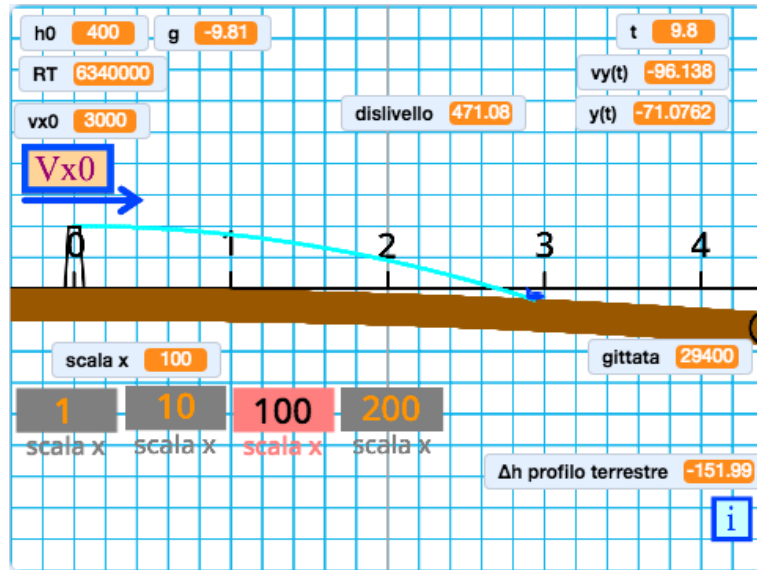
Dai risultati si vede che i valori di tempo di caduta, dislivello e velocità verticale sono rimasti identici mentre la gittata è cambiata come prevedibile:

cannonata estrema

$$s_x = v_x * t = 40 * 9,03 \simeq 360 \text{ m}$$

Caso con $V_{x0} = 3000 \text{ m/s}$

Con $V_{x0} = 3000 \text{ m/s}$ è necessario utilizzare la scala 100; si ottiene la grafica seguente:



I dati ricavabili dall'esperimento non sono dati attendibili! Sono valori derivati dal fatto che il proiettile tocca il colore marrone un po' dopo solo perché è più in basso ma non è stata modificata la sua traiettoria per tenere conto che anche le superfici equipotenziali che il proiettile sta attraversando si stanno incurvando:

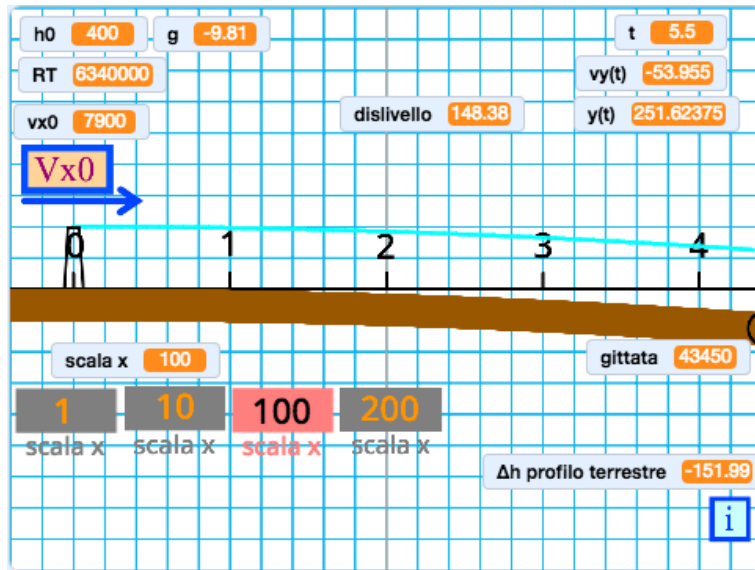
Ovviamente è anche inattendibile la stessa velocità imposta al canone che sarebbe di quasi 9 volte la velocità del suono, ma stiamo giocando.

Il profilo terrestre all'estremità destra, a 44 km di distanza, è più basso di circa 152 m che è un valore calcolato ed è corretto².

Si comincia a vedere che accade qualcosa se si spara molto forte.

Il risultato è interessante se si spara il proiettile a 7900 m/s

² È in questo valore una delle prove della curvatura della Terra quando al mare si vede scomparire all'orizzonte prima lo scafo e poi gli alberi delle vele.



si vede che cade come avviene con velocità basse secondo una parabola ma succede che alla gittata prevista anche il suolo si è abbassato rispetto all'orizzontale per cui, pur cadendo, il proiettile sembra non poter impattare il suolo.

In effetti il proiettile entrerebbe in orbita (molto bassa a dire il vero) solo che nella realtà ci sarebbe da considerare l'attrito con l'aria che a quella velocità (più di 22 volte la velocità del suono) deve essere enorme e la presenza delle montagne che impedirebbero il volo orizzontale a bassa quota.

Nota. Basterebbero piccole modifiche al codice per realizzare una cannonata estrema al di sopra dell'atmosfera ricalcolando ovviamente la velocità di sparo.

A proposito, quanto vale la velocità orbitale di un satellite in orbita circolare a distanza R dal centro di massa del corpo prevalente?

Su [wikipedia](#) si trova che vale:

$$v_o = \sqrt{g * R} = \sqrt{9,81 * 6340000} = 7886 \text{ m/s}$$

ed i conti tornano malgrado le approssimazioni.

Conclusioni

L'esperimento non può andare oltre in quanto il calcolo della traiettoria è fatto con un'accelerazione sempre in direzione verticale mentre con lunghe gittate è necessario

cannonata estrema

considerare che l'accelerazione di gravità modifica la direzione in quanto è sempre diretta verso il centro della Terra.

Inoltre il profilo terrestre disegnato è un arco di ellisse mentre la traiettoria realizzata è un arco di parabola per cui i due archi consono né di circonferenza né tantomeno concentrici.

Per considerare orbite satellitari bisogna cambiare impostazione e costruire uno spazio con la gravità diretta verso il centro della Terra (sono moti centrali).