

Sistema binario

Premessa

Il calcolo dei parametri del moto dei tre corpi è realizzato in uno spazio piano descritto con le coordinate cartesiane di posizione (A_x, A_y), (B_x, B_y) e (C_x, C_y).

Per posizionare i tre corpi all'interno dello Stage di Scratch si opera sia sul posizionamento del centro con i parametri **PGx** e **PGy**, che effettuano uno spostamento dell'origine rispetto allo stage, con i tasti freccia sia sul parametro **scala** che consente di rimpicciolire o ingrandire la grafica con i tasti [H], [J] e [K] senza che i calcoli del moto ne siano interessati.

Si possono fare misurazioni aiutandosi con il tasto [spazio] per arrestare il moto e con i tasti [S] per procedere a passo singolo di Δt (una iterazione), [X] per avanzare di un decimo di tic e [Z] per avanzare di un tic¹.

Le posizioni dei corpi possono essere misurate “a occhio” usando lo sfondo quadrettato e tenendo conto della scala oppure con l'uso delle coordinate di posizione di Scratch attivando la visualizzazione di “posizione x” e “posizione y” dal lato editor sempre tenendo conto della scala ed infine usando i tasti di commutazione [A], [B] e [C] per vedere i dati di posizione e velocità dei rispettivi oggetti o [D] per vedere il valore delle tre distanze.

Le unità di misura

Le unità di misura sono legate all'organizzazione di Scratch per cui si è assunto come unità di lunghezza il **passo** che è la distanza fra due pixel nella modalità editor di Scratch.

Il calcolo delle posizioni avviene in uno spazio piano infinito ricavato dall'estensione dello stage di Scratch per cui si usa sempre il passo come unità di lunghezza.

Dato che si possono effettuare modifiche di scala, per non fare confusione fra l'unità di lunghezza dei calcoli e l'unità di lunghezza dello stage, ho deciso di indicare con **ul** l'unità di misura delle lunghezze nello spazio dei calcoli.

In scala = 1, 1 ul corrisponde ad un passo, in scala = 2, 1 ul corrisponde a 2 passi.

¹ Come in tutti i progetti simulati il tempo è dato dal conteggio del numero di iterazioni usate per integrare i valori di accelerazione e velocità per calcolare lo spostamento. Per ridurre errori di integrazione le singole iterazioni vengono calcolate con durate di sottomultipli del tic date dal parametro Δt sempre visibile sullo stage.

Il tempo usato nelle simulazioni è un tempo simulato, viene misurato in **tic** ed è dato dal conteggio del numero delle iterazioni moltiplicato l'intervallo di tempo Δt usato per integrare i valori.

Per la massa si usa ancora una unità di misura ad hoc, la **um**.

La forza è misurata in **N**, Newton.

Il valore di G è fissato a $100 \text{ N} \cdot \text{um}^2 / \text{um}^2$

Dalla teoria si sa ...

L'espressione dell'equilibrio dinamico fra due corpi orbitanti con il sistema di riferimento fissato su uno dei due corpi è data da

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{G m_1 m_2}{r^2} = \frac{1}{\mu} \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

ricavato da pag 2 di [unisalento](#).

Per sviluppare i calcoli la massa inerziale da usare è la massa equivalente μ

$$\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

Il periodo di rivoluzione di due corpi mutuamente orbitanti si calcola con l'espressione

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G^* (m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

da cui

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

dove **a** è il semiasse maggiore del sistema binario.

caso di moto circolare

La velocità per un'orbita circolare di C intorno ad A con A fermo al centro va calcolata con

$$\mu \frac{v^2}{r} = G \frac{m_1 * m_2}{r^2}$$

da cui

$$v^2 = \frac{r}{\mu} G \frac{m_1 * m_2}{r^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 * m_2} G \frac{m_1 + m_2}{r} = G \frac{m_1 + m_2}{r}$$

Dalle espressioni del moto circolare uniforme, quale è il caso che si sta esaminando, si sa che la velocità angolare è

$$\omega = \frac{v}{r}$$

e quindi il periodo è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$$

e per chi si vuole complicare la vita anche da

$$T^2 = \frac{(2\pi r)^2}{v^2} = \frac{(2\pi r)^2 r^2}{\frac{G(m_1 + m_2)}{r}} = \frac{(2\pi r)^2 r^3}{G(m_1 + m_2)}$$

che riporta al caso generale sopra citato con $a=r$.

caso di masse molto diverse

Se la massa m_1 è molto maggiore della massa m_2 le cose si semplificano con approssimazioni accettabili per cui la massa inerziale tende ad essere uguale la massa maggiore e la velocità si calcola con

$$v^2 \simeq G \frac{m_1}{r}$$

il che spiega perché sembra ininfluenza la massa del pianeta in un sistema stellare nel calcolare le orbite (o la massa del satellite artificiale per la Terra mentre non lo è se si considera la Luna). Si fa finta che il centro del sistema sia fisso e coincidente con il centro della massa prevalente.

Casi

orbita 1)

La grafica viene impostata in scala 2 per osservare meglio le posizioni e per effettuare eventualmente misurazioni “a occhio” degli assi maggiori e del periodo più accurate.

Con i tasti [A] e [C] si osservano i dati di posizione dei rispettivi corpi che servono per misurare gli assi maggiori e il periodo rilevando gli attraversamenti dell'asse y.

Per misurare questi valori si fa compiere un mezzo giro di rivoluzione rilevando i dati di tempo e posizione prima e dopo.

Misurando le lunghezze in valore assoluto delle massime distanze dal centro delle orbite si ottengono le misure dei valori degli assi maggiori e quindi dei semiassi.

A: semiasse maggiore misurato: $(10.98 + 50) / 2 = 60.98 / 2 = 30.49$ ul

C: semiasse maggiore misurato: $(21,96 + 100)/2 = 121,96/2 = 60,98$ ul

La durata del mezzo periodo misura : 22,437 tic, quindi la durata del periodo è 44,874 tic, uguale per i due corpi.

Si nota subito che il rapporto fra le distanze dei due corpi dal centro di massa come il rapporto fra i due assi maggiori è 2 pari all'inverso del rapporto fra le masse rispettive e questo rapporto resta costante in ogni momento.

Nel progetto di Scratch il sistema binario orbita intorno al baricentro del sistema posto nell'origine degli assi cartesiani.

Per calcolare il periodo con la suddetta formula occorre conoscere la lunghezza del semiasse maggiore del sistema.

Manovrando i calcoli e fermanoli nelle posizioni di minima e massima distanza si possono ricavare i valori da usare per calcolare la lunghezza di a.

La massima distanza reciproca è $100 + 50 = 150u$ mentre la minima distanza è 32,927u per cui i semiasse maggiore misura

$$a = \frac{150 + 32,93}{2} = 91,47 \text{ ul}$$

Il periodo calcolato vale

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{91,47^3}{100(100 + 50)}} \simeq 44,86 \text{ tic}$$

che corrisponde al valore misurato con il progetto di Scratch.

Calcoli per B orbitante da distanze diverse

In tutti casi che seguono si imposta la massa di B a valori molto piccoli tali da risultare trascurabili ai fini della precisione dei calcoli usati di seguito.

I valori iniziali di B vengono impostati in modo tale che la sua orbita sia circolare rispetto al centro di massa nel quale si suppone concentrata la massa del sistema.

Per avere una massa m_2 trascurabile in orbita circolare intorno ad una massa m_1 prevalente, occorre esercitare una forza centripeta data dalla forza di attrazione gravitazionale per cui

$$m_1 \frac{v^2}{r} = G \frac{m_1 * m_2}{r^2}$$

da cui si ricava

$$v = \sqrt{G \frac{m_1}{r}}$$

orbite 2), 3), 4)

B orbita intorno al centro di massa di A+C dalla distanza di 200 ul che è un valore di poco maggiore all'asse maggiore del sistema binario A+C (150 ul).

Si imposta l'orbita di B in modo che ruoti intorno al centro del sistema di massa totale pari alla somma di $m_A + m_C$.

$$v = \sqrt{G \frac{m_1}{r}} = \sqrt{G \frac{(m_A + m_C)}{r}} = \sqrt{100 \frac{(100 + 50)}{200}} \simeq 8,66 \text{ ul/tic}$$

La circolarità dell'orbita è rapidamente persa date la vicinanza e l'asimmetria del sistema centrale.

orbita 5)

B viene fatto orbitare ad una distanza maggiore pari a 500 ul imprimendogli una velocità

$$v = \sqrt{G \frac{m_1}{r}} = \sqrt{G \frac{(m_A + m_C)}{r}} = \sqrt{100 \frac{(100 + 50)}{500}} \simeq 5,48 \text{ ul/tic}$$

e si vede che l'orbita tende a rimanere circolare per qualche rivoluzione.

Per avere un'orbita circolare più stabile occorre aumentare la distanza.

orbita 6)

Se la distanza viene portata a 1000 ul con velocità

$$v = \sqrt{G \frac{m_1}{r}} = \sqrt{G \frac{(m_A + m_C)}{r}} = \sqrt{100 \frac{(100 + 50)}{1000}} \simeq 3,87 \text{ ul/tic}$$